

Геометрія, 12 клас (заняття 2; 15-17 березня).

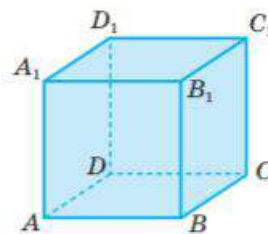
Тема. Многогранники.

Ви вже знаєте, що геометрична фігура — будь-яка множина точок: скінченна або нескінченна, на площині або в просторі. Надалі вивчатимемо властивості фігур, які називають *геометричними тілами*.

На інтуїтивному рівні поняття *тіла* розкривають такі малюнки (мал. 86).

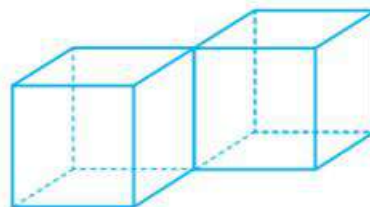


Прикладом геометричного тіла є *куб* (мал. 87). Його поверхня складається з шести рівних квадратів. Поверхня куба поділяє весь простір на дві просторові області: внутрішню (обмежену) та зовнішню (необмежену). Куб є об'єднанням його поверхні й обмеженої нею внутрішньої просторової області. Кожне геометричне тіло має деяку поверхню та обмежену нею внутрішню просторову область. Вважається, що просторова область геометричного тіла складається з одного «шматка», а кожна точка геометричного тіла належить його просторовій області або поверхні.



Мал. 87

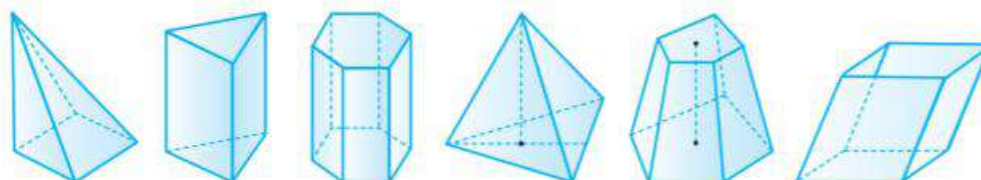
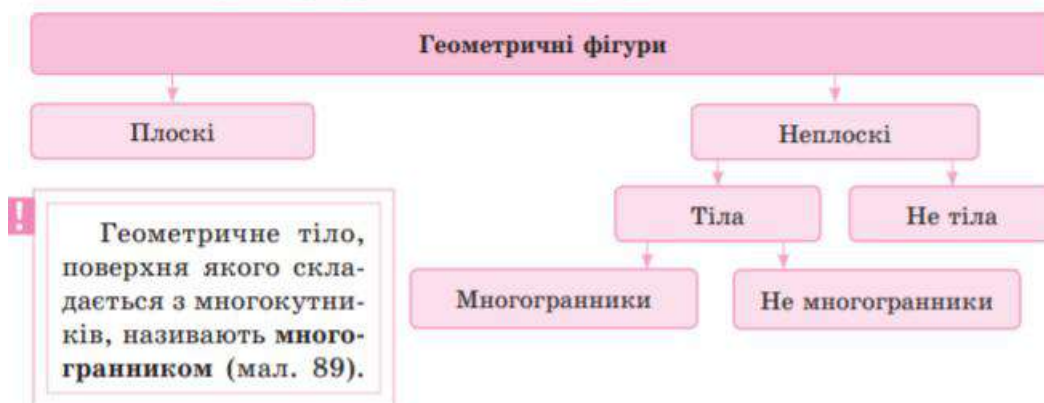
Кожна призма, піраміда, циліндр, конус, куля — це геометричні тіла. А плоска фігура, лінія, поверхня — не тіла, бо вони не мають просторових областей. Не вважають геометричним тілом також об'єднання двох кубів зі спільним ребром (мал. 88), бо ця фігура містить дві роз'єднані просторові області, а не одну.



Мал. 88

Оскільки в геометрії не розглядають інших тіл, крім геометричних, то їх часто називають просто *тілами*.

Усі геометричні фігури можна класифікувати так.

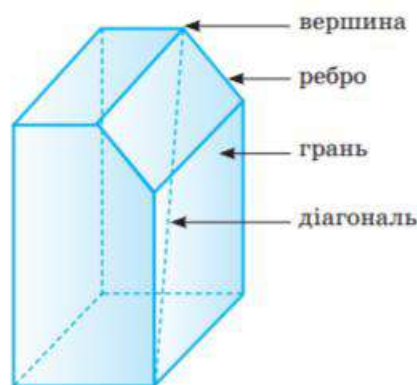


Мал. 89

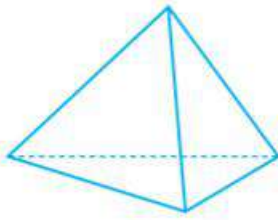
Многокутники, які обмежують многогранник, називають *гранями*, сторони граней — *ребрами*, а їхні кінці — *вершинами многогранника*. Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, — *діагональ многогранника* (мал. 90).

Найменше число граней многогранника — чотири.

Як і багато інших геометричних фігур, многогранники бувають *опуклі* та *неопуклі*. Опуклий многогранник розміщений з одного боку від площини будь-якої його грані. Куб і тетраедр — опуклі многогранники.



Мал. 90

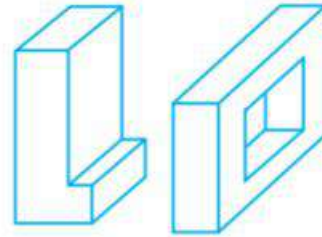


Мал. 91

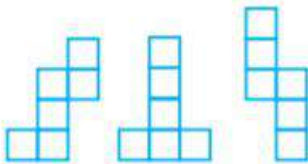
Многогранник, який має лише чотири грані, називають **тетраедром** (грец. *тетра*ζ — чотири, *εδра* — грань). Якщо всі ребра тетраедра рівні, його називають **правильним тетраедром** (мал. 91).

Приклади неопуклих многогранників наведені на малюнку 92.

Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розгорнути на площині, то матимемо *розгортку* многогранника. Поверхню одного й того самого многогранника можна розгорнути по-різному. На малюнку 93 подані деякі розгортки куба.



Мал. 92

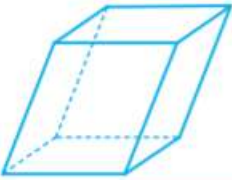
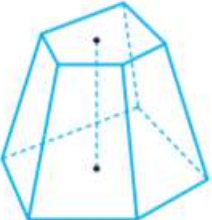


Мал. 93

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней; вона дорівнює площі розгортки даного многогранника.

Проведемо дослідження, яке колись здійснив Л. Ейлер. Визначимо для многогранників, зображених у таблиці 4, кількість вершин (B), граней (Γ) і ребер (P). Продовжте аналогічні дослідження для інших многогранників, виконуючи завдання № 572 на с. 145.

Таблиця 4

Фігури	Вершин (B)	Граней (Γ)	Ребер (P)	$B + \Gamma - P$
	8	6	12	2
	10	7	15	2

Помічене вами співвідношення між числом вершин V , граней G і ребер P Л. Ейлер сформулював у вигляді теореми, що стала однією з перших теорем топології — важливої галузі математики.

Перевірте це твердження для куба й тетраедра. Чи правильним є це твердження для многогранників, зображених на малюнку 92?



Для будь-якого опуклого многогранника
 $V + G - P = 2$.

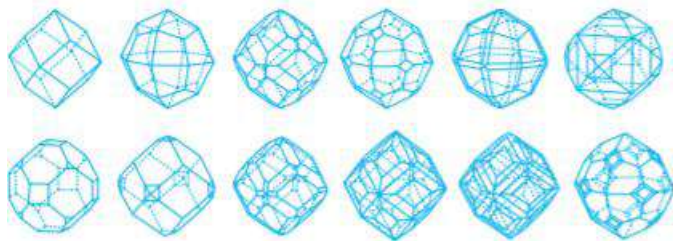
З різними, іноді дуже складними, матеріальними моделями многогранників мають справу каменярі, теслі, шліфувальники, стругальники, гранувальники, мінералоги, кристалографи та інші спеціалісти.

Наприклад, столяр щодня робить десятки деталей у вигляді найрізноманітніших многогранників. Екскаваторники риють різні траншеї, котловани та інші виїмки також переважно у вигляді многогранників. Фахівці харчової промисловості у формі різних видів многогранників готують страви та подають їх до столу (мал. 94).



мал. 94

На малюнку 95 зображено природні форми кристалів гранату.



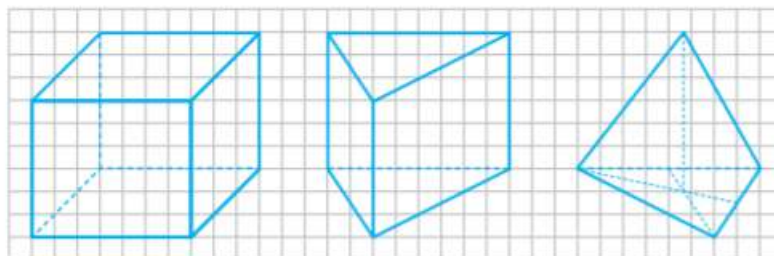
Мал. 95



Мал. 96

Відомий чеський письменник Карел Чапек, ознайомившись із кристалами та зрозумівши їх роль у житті людей, проспівав їм великий гімн — словом і малюнком (мал. 96): «І в людині захована сила кристалізації... Число і фантазія, закон і достаток — ось живі, творчі сили природи: не сидіти під землею деревом, а створювати кристали й ідеї, ось що означає бути разом із природою!»

Щоб навчитися правильно, наочно і швидко креслити многогранники (куб, правильну трикутну призму і правильну трикутну піраміду), можна виконати кілька зображень за готовими шаблонами, наведеними на мал. 97.



Мал. 97

Мал. 97

Різні способи зображення просторових фігур на площині розглядають у кресленні і в нарисній геометрії. Їх використовують архітектори, інженери, будівельники, дизайнери та інші фахівці. Досить часто їм доводиться об'єднувати декілька многогранників або роз'єднувати їх чи розрізати.

У побуті ми також часто виконуємо аналогічні дії, наприклад, розрізаємо масло чи торт (мал. 98), поролон чи пінопласт (мал. 99).



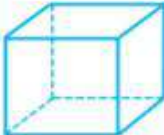




Мал. 98



Мал. 99

Домашнє завдання

571. Побудуйте прямокутний паралелепіпед, у якого висота менша від кожного ребра основи. Побудуйте його діагональ. Заштрихуйте його найбільшу грань.
572. Перемалуйте в зошит таблицю. Укажіть кількість граней, ребер і вершин для відповідних многогранників і переконайтеся у справедливості теореми Ейлера для кожного з них.

Фігура					
Вершини					
Грані					
Ребра					
$V + G - P$					

573. Намалуйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і вершин він має? Як називають такий многогранник?
574. Намалуйте многогранник, який має 5 граней і 5 вершин. Скільки ребер він має?
575. Намалуйте многогранник, який має 5 граней і 6 вершин. Скільки ребер він має?

Перевірте себе

- 1 Що називають многогранником? Назвіть його елементи.
- 2 Які види многогранників вам відомі?
- 3 Які многогранники називають опуклими, а які — неопуклими?
- 4 Що називають площею поверхні многогранника?
- 5 Сформулюйте теорему Ейлера про многогранники.