

# Алгебра; 12 клас (19.04-22.04.2022).

## Тема. Інтеграл. Визначений інтеграл.

### Обчислення визначеного інтегралу.

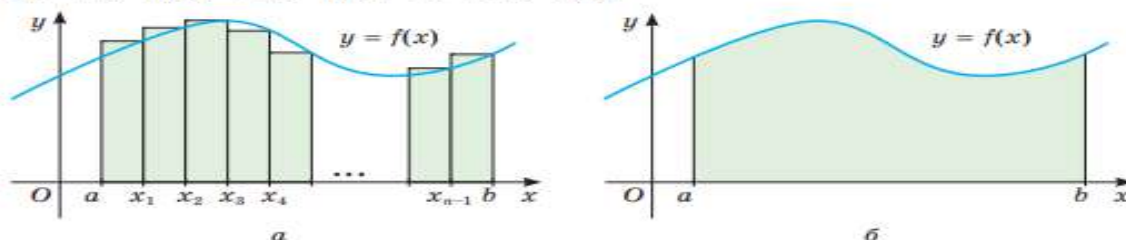
#### § 7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розглянемо інший спосіб визначення площі підграфіка функції.

Нехай дано підграфік деякої функції  $f(x)$  на проміжку  $[a; b]$  (мал. 39). Поділимо відрізок  $[a; b]$  точками  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$  на  $n$  рівних відрізків:  $[a; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; b]$ . Побудуємо на першому відрізку прямокутник висотою  $f(x_1)$ , на другому — прямокутник висотою  $f(x_2)$  і т. д. Нарешті, на  $n$ -му відрізку побудуємо прямокутник висотою  $f(b)$ . Утвориться східчастий багатокутник, складений з  $n$  побудованих прямокутників (мал. 39, а). Якщо основа кожного такого прямокутника дорівнює  $\Delta x$ , то площа всього східчастого багатокутника

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(b).$$

Суми вигляду  $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \dots + \Delta x \cdot f(b)$  називають **інтегральними сумами функції  $f(x)$  на проміжку  $[a; b]$** .



Мал. 39

Із цього випливає, що площею підграфіка функції  $f(x)$  на проміжку  $[a; b]$  є  $\int_a^b f(x) dx$ . Оскільки вона дорівнює також  $F(b) - F(a)$ , де  $F(x)$  — первісна для функції  $f(x)$ , то  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Це — **формула Ньютона—Лейбніца**, її називають ще **основною формулою математичного аналізу**.

Ця формула дає змогу розв'язувати багато важливих задач не обчисленням границь інтегральних сум, що досить важко, а за допомогою первісної.

Раціоналізувати обчислення часто допомагає така **властивість інтеграла**:

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Справедливість цієї формули впливає з таких перетворень:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) - g(x)) dx &= (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) = \\ &= (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$



**Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716)**

Видатний німецький математик, фізик, філософ, організатор наукових установ. Разом з Ньютоном поділяє славу відкриття диференціального та інтегрального числень. Увів багато загальноновживаних тепер математичних алгоритмів, термінів і символів.



**Ісаак Ньютон**  
(1643–1727)

Видатний англійський фізик, астроном, математик. Сформулював основні закони механіки, закон всесвітнього тяжіння. Незалежно від Лейбніца започаткував математичний аналіз.

*У вивченні наук приклади корисніші від правил.*

*І. Ньютон*

*Ньютон був найвидатніший геній з усіх, що будь-коли існували.*

*Ж. Лагранж*

Приклад обчислення визначеного інтегралу.

Обчислити інтеграл:  $\int_1^3 x dx$ .

Знаходимо первісну для функції  $f(x)=x$ . Це буде  $F(x)=\frac{x^2}{2}$ .

$$\int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (кв.од.)}$$

## Домашнє завдання

Обчислити визначений інтеграл:

$$\int_2^5 x dx; \quad \int_3^7 x dx; \quad \int_0^5 x^2 dx; \quad \int_{-3}^3 x^2 dx;$$

Обчислити вираз:  $(15,56 - 19,4) * 7,5 - 7,6 : 4$ .