

Алгебра; 12 клас (12.04-15.04.2022).

Тема. Інтеграл. Визначений інтеграл.

Обчислення визначеного інтегралу.

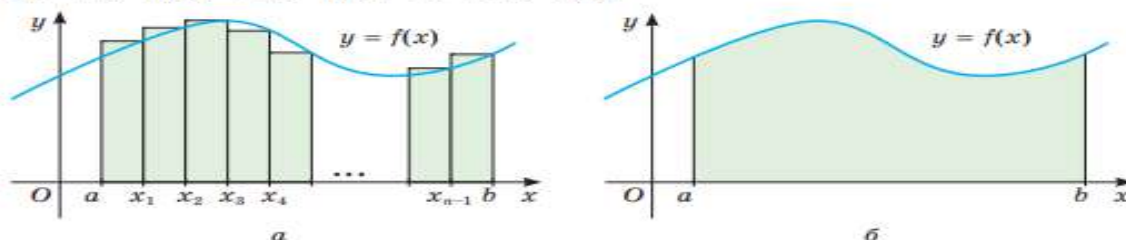
§ 7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розглянемо інший спосіб визначення площі підграфіка функції.

Нехай дано підграфік деякої функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ (мал. 39). Поділимо відрізок $[a; b]$ точками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ на n рівних відрізків: $[a; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; b]$. Побудуємо на першому відрізку прямокутник висотою $f(x_1)$, на другому — прямокутник висотою $f(x_2)$ і т. д. Нарешті, на n -му відрізку побудуємо прямокутник висотою $f(b)$. Утвориться східчастий багатокутник, складений з n побудованих прямокутників (мал. 39, а). Якщо основа кожного такого прямокутника дорівнює Δx , то площа всього східчастого багатокутника

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(b).$$

Суми вигляду $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \dots + \Delta x \cdot f(b)$ називають **інтегральними сумами функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$** .



Мал. 39

Із цього випливає, що площею підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ є $\int_a^b f(x) dx$. Оскільки вона дорівнює також $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, то $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Це — **формула Ньютона—Лейбніца**, її називають ще **основною формулою математичного аналізу**.

Ця формула дає змогу розв'язувати багато важливих задач не обчисленням границь інтегральних сум, що досить важко, а за допомогою первісної.

Раціоналізувати обчислення часто допомагає така **властивість інтеграла**:

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Справедливість цієї формули впливає з таких перетворень:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) - g(x)) dx &= (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) = \\ &= (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$



Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716)

Видатний німецький математик, фізик, філософ, організатор наукових установ. Разом з Ньютоном поділяє славу відкриття диференціального та інтегрального числень. Увів багато загальноновживаних тепер математичних алгоритмів, термінів і символів.



Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Видатний англійський фізик, астроном, математик. Сформулював основні закони механіки, закон всесвітнього тяжіння. Незалежно від Лейбніца започаткував математичний аналіз.

У вивченні наук приклади корисніші від правил.
І. Ньютон

Ньютон був найвидатніший геній з усіх, що будь-коли існували.

Ж. Лагранж

Приклад обчислення визначеного інтегралу.

Обчислити інтеграл: $\int_1^3 x dx$.

Знаходимо первісну для функції $f(x)=x$. Це буде $F(x)=\frac{x^2}{2}$.

$$\int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (кв.од.)}$$

Домашнє завдання

Обчислити визначений інтеграл:

$$\int_1^4 x dx; \quad \int_2^5 x dx; \quad \int_0^6 x^2 dx; \quad \int_{-2}^2 x^2 dx;$$

Обчислити вираз: $(17,65 - 22,2) * 9,3 - 9,5 : 5$.